1. ~~Introduction~~ - TP2. OPS le 2 Nov 26

$\Omega = \{(8kw, 30mn), (8kw, 60mn), (8kw, 90min),$

$(16kw, 30mn), (16kw, 60mn), (16kw, 90min)\}$

$A = \mathcal{P}(\Omega)$ → cas dénombrable (fini)

on propose une proba = la frequence observée

$\mathbb{P}_\Omega = \{ \frac{50}{200} = \frac{1}{4}, \quad 40/200 = \frac{1}{5}, \quad 20/200 = 1/10,$

$\frac{40}{200} = \frac{1}{5}, \quad 30/200 = \frac{3}{20}, \quad \frac{20}{200} = 1/10 \}$

~~Introduction~~

2. Appli : $X : \Omega \to E$

$w = (w_p, w_d) \to X(w) = w_p \times w_d$. $E = X(\Omega) = \{4, 8, 12, 16, 24\}$ kwh kwh kwh kwh kwh

$\because E$ dénomb $\to A = \mathcal{P}(E) \Rightarrow$ esp d'arr $= (E, \mathcal{P}(E))$

fon de masse : $\mathbb{P}_X(X=4) = \mathbb{P}_\Omega(w : X^{-1}(w) = 4) = \mathbb{P}_\Omega(w = (8kw, 30mn)) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}_X(X=8) = \mathbb{P}_\Omega(\{w_1 = 8kw, 60mn, \; w_2 = (16kw, 30mn\})$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}_X(X=12) = \mathbb{P}_\Omega(\{w_1 = 8kw, 90mn\}) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{P}_X(X=16) = \frac{3}{20}$ $\quad \mathbb{P}_X(X=24) = 1/10$

3. $\Gamma = \lceil \frac{X}{6} \rceil$ → prend l'operation qui prends la partie entière supérieure.

eg. $\lceil 5.6 \rceil = 6$. $\lceil 5 \rceil = 5$

$5.6 = 5 + 0.6$ → partie fractionnaire

↓ partie entière (inf)

le domaine de Γ

X	Γ	$\mathbb{P}_\Gamma$
4 ($\frac{1}{4}$)	1	$1 = \frac{1}{4}$
8 ($\frac{2}{5}$)	2	$2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
12 ($\frac{1}{10}$)	3	$3 = 3/20$
16 ($3/20$)	4	$4 = 1/10$
24 ($\frac{1}{10}$)		

4. Si nbr = 1 → couvrant le besoin couvre $\frac{1}{4}$ des $\frac{1}{4}$ coupures. → $m = 3$

nbr = 2 = couvre le besoin des $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$m = 3 \rightarrow$ constant

5. $\mathbb{P}(X$ soit couvert par 3 batteries $| FC)$ — le besoin energetique X aléa

sinon la pr on demandrait pas sa proba

$= \mathbb{P}(X \Leftrightarrow \Gamma$ batterie necessair soit couvert par 3 batteries $| FC)$

$= \mathbb{P}(\Gamma \leq 3 | FC) = \dfrac{\mathbb{P}(\Gamma \leq 3 \cap FC)}{\mathbb{P}(FC)}$

proba sur quel univers

Uni de X. pas d'info sur FC

uni de Γ, pas ——

uni de Ω, ✓ info sur FC et évenement réciproque de $\Gamma \leq 3$ possible

$= \dfrac{\mathbb{P}(\{w \in \Omega : \Gamma(w) \leq 3 \text{ et } w \rightarrow FC\})}{\mathbb{P}(w \rightarrow FC)}$

revenir à X d'abord.

$= \dfrac{\mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) \leq 16 \text{ et } w \in FC\})}{\mathbb{P}(\{(16, 30), (16, 60), (16, 90)\})}$

$= \dfrac{\mathbb{P}_\Omega(\{(16, 30), (16, 60)\}}{\mathbb{P}(\ \dots\ )}$

$= \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{3}{20}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{10}} = \dfrac{4+3}{4+3+2} = \dfrac{7}{9} \leq 0.9$

Non!

6. $\boxed{\text{Methode 1}}$, redéfinir univers

$\Omega_{\geq 60mn} = \{(8kW, 60mn), (8kW, 90mn)$

$(16kW, 60mn), (16kW, 90mn)\}$

X	8	12	16	24
	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$

$\Gamma \circ X$	2	3	4
	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$

4 modules est necessaires

$\mathcal{A} = P(\Omega)$

$\mathbb{P}_\Omega = \left\{ \begin{matrix} 40/110 & 20/110 \\ 30/110 & 20/110 \end{matrix} \right\} \rightarrow$ suivre le m̂ processus

⚠ Attention, il faut pas jeter les probas sans renormalisation!

$\boxed{\text{Methode 2}}$ proba conditionnelle. $M = \{\text{Dunce} \geq 60mn\}$

$\forall x \in E \quad \mathbb{P}(X = x | M) = \dfrac{\mathbb{P}_\Omega(X = x \cap M)}{\mathbb{P}_\Omega(M)} = \dfrac{\mathbb{P}_\Omega(w \in \Omega : X(w) = x \text{ et } w_{\text{Dunce}} \geq 60mn)}{\mathbb{P}_\Omega(M)}$

TD2 OPS 26

Ex 1.1 $\Omega = \{(U,M), (U,H), (R,M), (R,H)\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_\Omega = \{80/200, 20/200, 40/200, 60/200\}$

$= \{\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}\}$

2. $X : \Omega \to E = \{0, 15, 30\}$ $(E, \mathcal{P}(E))$ → esp d'arr

$\mathbb{P}_{X(\Omega)} = \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$

3. $\Gamma : \{0, 15, 30\} \to \{0, 1\}$.

$\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \to \frac{2}{5} \\ 1, & x>0 \to \frac{3}{5} \checkmark \end{cases}$

4. $\mathbb{P}(\text{de R} \mid X=30) = \frac{\mathbb{P}(R \cap X=30)}{\mathbb{P}(X=30)} = \frac{3/10}{9/10} = 3/9$

Ex 2 2.1 $\mathbb{P}(X=1 \mid X \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{1-\mathbb{P}(X=0)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$

Ex 2.2 1. $S \to$ le temps jusqu'à la 1ère panne ; $T \to$ l'écart entre 2 pannes

$s \geq 1$, $t \geq 0$

2. $\mathbb{P}(S=s, T=t) = \mathbb{P}(X=s, Y=t+s) + \mathbb{P}(X=t+s, Y=s)$

à noter pd. $t>0$, s, $t+s$ sont 2 valeurs différentes $= 2\mathbb{P}(X=s)\mathbb{P}(Y=t+s) = 2(1-p)^{s-1}p\,(1-p)^{t+s-1}p$

$= 2(1-p)^{t+2s-2}p^2$

$s \geq 1$, $t=0$

$\mathbb{P}(S=s, T=0) = \mathbb{P}(X=Y=s) = p^2(1-p)^{2s-2}$

3. $\forall s \geq 1$

$\mathbb{P}(S=s) = \sum_{t=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=s, T=t) = p^2 q^{2s-2} + \sum_{t=1}^{+\infty} \mathbb{P}\, 2(1-p)^{t+2s-2}p^2$

$t' = t-1 \iff t = t'+1$

$= p^2 q^{2s-2} + \sum_{t'=0}^{+\infty} 2(1-p)^{t'+2s-1}p^2$

$= p^2 q^{2s-2} + 2(1-p)^{2s-1}p$

$S \sim \text{Geo}(p(2-p))$

Ex 2.4.

Soit $X \sim Geo(p)$, $\mathbb{P}(X > n_0) = \sum_{i=n_0+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p \overset{j'=i-n_0}{=\!=\!=} \sum_{j'=1}^{+\infty} (1-p)^{j'+n_0-1} p$

$= (1-p)^{n_0} \sum_{j'=1}^{+\infty} (1-p)^{j'-1} p$ (la fin de masse de Geo(p) se somme à 1) $= (1-p)^{n_0}$

$\mathbb{P}(X - n_0 = k \mid X > n_0) = \dfrac{\mathbb{P}(X - n_0 = k \text{ et } X > n_0)}{\mathbb{P}(X > n_0)}$ $k = 1, 2, \dots$

$= \dfrac{\mathbb{P}(X - n_0 = k)}{\mathbb{P}(X > n_0)} = \dfrac{(1-p)^{k+n_0-1} p}{(1-p)^{n_0}}$

$= (1-p)^{k-1} p$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}(X = k)$.

Ex 2.5

1. $N = N_1 + \dots + N_n$

2. $\{N_2 = m\} = \{X_1 = X_2 = \dots = X_m, X_{m+1} \neq X_1\}$

$= \bigcup_{i=1}^{n} \{X_1 = X_2 = \dots = X_m = i, X_{m+1} \neq i\}$

3. $\mathbb{P}(N_2 = m) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_1 = \dots = X_m = i, X_{m+1} \neq i\}\right)$

disjoints

$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_m = i, X_{m+1} \neq i)$

indépendance entre $X_1, \dots, X_{m+1}$

$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = i) \dots \mathbb{P}(X_m = i) \mathbb{P}(X_{m+1} \neq i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^m \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^m} = \left(\frac{1}{n}\right)^{m-1} \frac{n-1}{n}$

$N_2 \sim Geo\left(\frac{n-1}{n}\right)$

4. $\{N_2=m_2,\ N_3=m_3\} = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \{X_1 = \dots = X_{m_2} = i,\ X_{m_2+1} = j,\ X_{m_2+1} = i \text{ ou } j,$
$X_{m_2+2} = i \text{ ou } j, \dots, X_{m_2+m_3} = i \text{ ou } j,$
$X_{m_2+m_3} \neq i \text{ et } \neq j\}$

$$\mathbb{P}(N_2=m_2,\ N_3=m_3) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbb{P}(X_1=i) \dots \mathbb{P}(X_{m_2}=i)\,\mathbb{P}(X_{m_2+1}=j)$$
$$\mathbb{P}(X_{m_2+1} = i \text{ ou } j) \dots \mathbb{P}(X_{m_2+m_3} = i \text{ ou } j)$$
$$\mathbb{P}(X_{m_2+m_3} \neq i \text{ ni } j)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{m_2+1} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1} \frac{n-2}{n}$$

↓ sans remise, ordonné

$$A_n^2 \left(\frac{1}{n}\right)^{m_2+1} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1} \frac{n-2}{n}$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{m_2+1} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1} \frac{n-2}{n}$$

$$= n(n-1) \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{m_2+1}}_{\downarrow} \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1}}_{\downarrow} \frac{n-2}{n}$$

les termes en m_2, m_3 (les variables) se sont pas mélangés → signe de l'indépendance

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{m_2-1} \frac{n-1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^{m_3-1} \frac{n-2}{n}$$

↓ ↓

$\mathbb{P}_{N_2 \sim \text{Geo}(\frac{n-1}{n})}(N_2 = m_2)$ $\quad$ $\mathbb{P}_{N_3 \sim \text{Geo}(\frac{n-2}{n})}(N_3 = m_3)$

5. pas de réponse unique.

Une intuition e.g.: le temps d'attente pour un i-ième morceau N_i ne dépende que de $\mathbb{P}(X_j$ donne un nouveau numéro)

et le temps d'attente passé $N_1, \dots, N_{i-1}$ n'impactent pas cette probabilité.